

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 253

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 191

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 258

A4. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Λάθος, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. 1^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} |z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4 &\Leftrightarrow (z - 1)(\bar{z} - 1) + (z + 1)(\bar{z} + 1) = 4 \Leftrightarrow \\ z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 + z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = 4 &\Leftrightarrow 2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \\ |z|^2 = 1 &\Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

2^{ος} τρόπος

$$\begin{aligned} |z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4 &\stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |x + yi - 1|^2 + |x + yi + 1|^2 = 4 \Leftrightarrow \\ \left(\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x + 1)^2 + y^2}\right)^2 = 4 &\Leftrightarrow \\ (x - 1)^2 + y^2 + (x + 1)^2 + y^2 = 4 &\Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4 &\Leftrightarrow \\ 2x^2 + 2y^2 = 2 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

B2. 1^{ος} τρόπος

- $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$
 $(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 = 2 \Leftrightarrow$
 $|z_1|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow -z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 = 0 \Leftrightarrow$
 $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0 \quad (1)$
- $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2$
 $= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2 \stackrel{(1)}{=} 1 + 0 + 1 = 2$

άρα $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$

2^{ος} τρόπος

Σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο με κορυφές

$O(0, 0)$, $A(z_1)$, $B(z_2)$ και $\Gamma(z_1 + z_2)$.

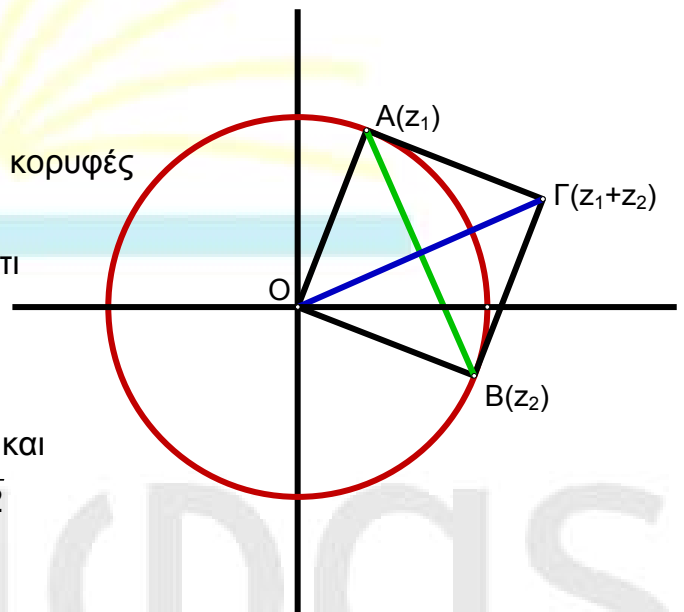
Το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο διότι

$$(AB)^2 = |z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$(OA)^2 + (OB)^2 = \rho^2 + \rho^2 = 2$$

Επομένως το $OAGB$ είναι τετράγωνο και

$$|z_1 + z_2| = (OG) = (AB) = |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$$



3^{ος} τρόπος

Έστω $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

Το $\Delta(-z_2)$ είναι το συμμετρικό του B ως προς το O

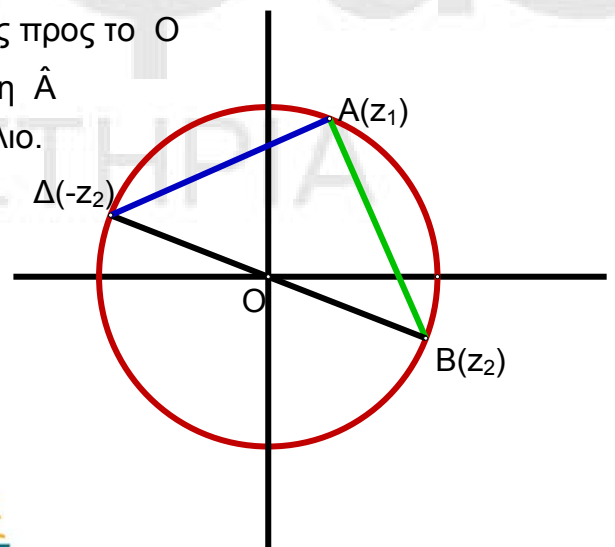
Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο διότι η \hat{A} είναι εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο.

$$\text{Π.Θ. : } (A\Delta)^2 = (B\Delta)^2 - (AB)^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 - (-z_2)|^2 = (2\rho)^2 - |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2|^2 = 4 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2$$

Επομένως $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$



$$\begin{aligned} \text{B3. } |w - 5\bar{w}| = 12 & \stackrel{w = x + yi}{\Leftrightarrow} \underset{x, y \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} |x + yi - 5(x - yi)| = 12 \Leftrightarrow \\ |x + yi - 5x + 5yi| = 12 & \Leftrightarrow |-4x + 6yi| = 12 \Leftrightarrow \\ (-4x)^2 + (6y)^2 = 12^2 & \Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \Leftrightarrow \\ \frac{16x^2}{144} + \frac{36y^2}{144} = 1 & \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

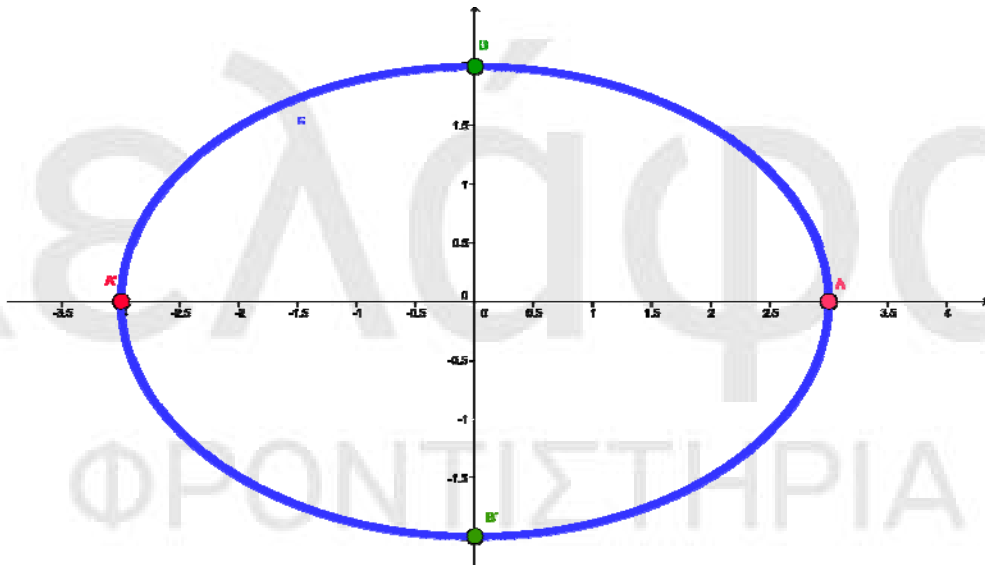
Ο γ.τ. των εικόνων των w είναι έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

1^{ος} τρόπος

Η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ έχει :

- μεγάλο άξονα στον x και κορυφές $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$ και
- μικρό άξονα στον y και κορυφές $B(0, 2)$, $B'(0, -2)$

Σχεδιάζουμε την έλλειψη



Επομένως :

$$|w|_{\min} = (OA) = (OA') = 2 \text{ και}$$

$$|w|_{\max} = (OB) = (OB') = 3$$

2^{ος} τρόπος

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$\bullet \quad 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 = 36 - 4y^2$$

$$\text{άρα } 4x^2 + 4y^2 \leq 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9 \Leftrightarrow |w|^2 \leq 9 \Leftrightarrow |w| \leq 3$$

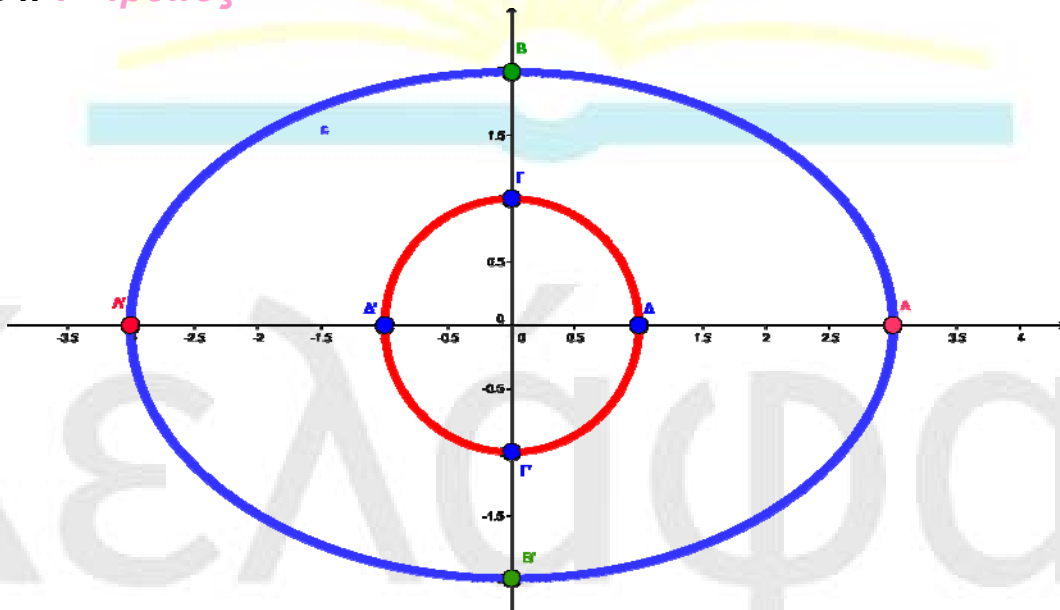
Η ισότητα ισχύει όταν $x = \pm 3$ και $y = 0$, άρα $|w|_{\max} = 3$

$$\bullet \quad 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow 9x^2 + 9y^2 = 36 + 5x^2$$

$$\text{άρα } 9x^2 + 9y^2 \geq 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 4 \Leftrightarrow |w|^2 \geq 4 \Leftrightarrow |w| \geq 2$$

Η ισότητα ισχύει όταν $x = 0$ και $y = \pm 2$, άρα $|w|_{\min} = 2$

B4. 1^{ος} τρόπος



$$\left. \begin{aligned} |z - w|_{\min} &= (B\Gamma) = (B'\Gamma') = 1 \\ |z - w|_{\max} &= (A\Delta') = (A'\Delta) = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 \leq |z - w| \leq 4$$

2^{ος} τρόπος

$$|z - w| \leq |z| + |w| \leq 1 + |w|_{\max} = 1 + 3 = 4$$

$$|z - w| \geq ||z| - |w|| = |1 - |w|| \stackrel{|w| > 1}{=} |w| - 1 \geq |w|_{\min} - 1 = 2 - 1 = 1$$

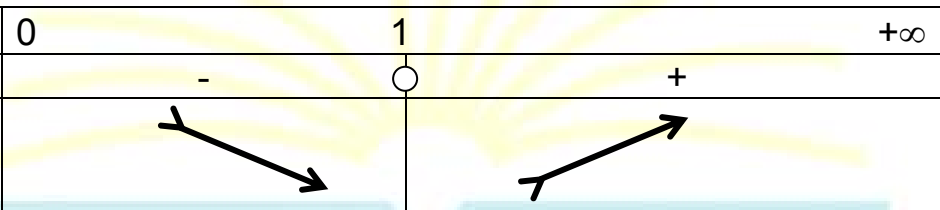
Επομένως $1 \leq |z - w| \leq 4$

ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned} \Gamma 1. f'(x) &= [(x-1) \cdot \ln x - 1]' = (x-1)' \cdot \ln x + (x-1) \cdot (\ln x)' \\ &= \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

- Για $x = 1$ είναι $f'(1) = 0$
- Για $0 < x < 1$ είναι $\ln x < 0$ και $\frac{x-1}{x} < 0$, άρα $f'(x) < 0$
- Για $x > 1$ είναι $\ln x > 0$ και $\frac{x-1}{x} > 0$, άρα $f'(x) > 0$

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		○	
f			



Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0, 1]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$.

- $A_1 = (0, 1]$

Η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο A_1

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1) \cdot \ln x - 1] = +\infty \\ f(1) &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(A_1) = [-1, +\infty)$$

- $A_2 = (1, +\infty)$

Η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο A_2

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &\stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} f(1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1) \cdot \ln x - 1] = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(A_2) = (-1, +\infty)$$

άρα $f(D_f) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-1, +\infty)$

$$\Gamma 2. x^{x-1} = e^{2013} \quad (x > 0) \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1) \cdot \ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1) \cdot \ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012$$

- Η f συνεχής και γν. φθίνουσα στο A_1 και $2012 \in f(A_1)$
άρα η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μοναδική ρίζα x_1 στο A_1
 - Η f συνεχής και γν. αύξουσα στο A_2 και $2012 \in f(A_2)$
άρα η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει μοναδική ρίζα x_2 στο A_2
- Επομένως η εξίσωση $f(x) = 2012$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

Γ3. 1^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση h , με $h(x) = e^x \cdot [f(x) - 2012]$

- h παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με
 $h'(x) = e^x \cdot [f(x) + f'(x) - 2012]$
- $h(x_1) = h(x_2) = 0$

από Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x_0} \cdot [f(x_0) + f'(x_0) - 2012] = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) + f'(x_0) - 2012 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) + f'(x_0) = 2012$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση S , με $S(x) = f'(x) + f(x) - 2012$

- S συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών
- $S(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 = f'(x_1) < 0$, διότι $x_1 < 1$
 $S(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 = f'(x_2) > 0$, διότι $x_2 > 1$

από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$S(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) + f'(x_0) - 2012 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) + f'(x_0) = 2012$$



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ4. Είναι $g(x) = f(x) + 1 = (x-1) \cdot \ln x$

• $g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Αναζητούμε το πρόσημο της g στο $[1, e]$

Είναι $g(x) > 0$ στο $[1, e]$, διότι $x-1 > 0$ και $\ln x > 0$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x-1) \cdot \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right)' \cdot \ln x dx \\ &= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot (\ln x)' dx \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{e^2}{4} - e - \left(\frac{1}{4} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση φ , με $\varphi(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t) dt - \frac{x-x^2}{e}$, $x > 0$

Είναι $\varphi(x) \geq 0 = \varphi(1)$.

- Η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$
- Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = f(x^2 - x + 1) \cdot (2x - 1) - \frac{1 - 2x}{e}$$

- Το $x_0 = 1$ είναι εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$

Από Θ. Fermat ισχύει ότι $\varphi'(1) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(1) + \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e}$$



• Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

• $f(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$

από συνέπειες Θ. Βολζανο,

η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και επειδή

$f(1) = -\frac{1}{e} < 0$, θα είναι $f(x) < 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

$$\ln x - x = - \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \cdot |f(x)| \quad \begin{matrix} f(x) < 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\ln x - x = f(x) \cdot \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right) \quad (1)$$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου είναι $\ln x \leq x - 1 < x$,

$$\text{άρα } \ln x - x < 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}_{f(x) < 0} \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e > 0$$

$$(1) \Rightarrow f(x) = \frac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e}$$

Η συνάρτηση f_1 , με $f_1(x) = \frac{\ln x - x}{f(x)}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

ως πράξεις συνεχών, άρα η συνάρτηση f_2 ,

με $f_2(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

ως πράξεις παραγωγίσιμων.

$$(1) \stackrel{f(x) < 0}{\Rightarrow} \frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \quad (2)$$

1^{ος} τρόπος

Θεωρούμε συνάρτηση h , με $h(x) = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e$

$$\text{Είναι } h'(x) = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e \right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}$$

$$(2) \Leftrightarrow h'(x) = h(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου είναι $h(x) = c \cdot e^x \Leftrightarrow$

$$\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e = c \cdot e^x \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt = c \cdot e^x - e \quad (3)$$

Για $x = 1$ έχουμε $c = 1$

$$(3) \xRightarrow{c=1} \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt = e^x - e, \quad x > 0$$

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε $\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow$

$$f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} \cdot (\ln x - x), \quad x > 0$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε συνάρτηση K , με $K(x) = \ln x - x, x \in (0, +\infty)$

$$K(x) = f(x) \cdot \left(\int_1^x \frac{K(t)}{f(t)} dt + e \right) \quad (3) \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x \frac{K(t)}{f(t)} dt + e = \frac{K(x)}{f(x)} \quad (4)$$

Παραγωγίζουμε την (3) κατά μέλη και έχουμε :

$$K'(x) = f'(x) \cdot \left(\int_1^x \frac{K(t)}{f(t)} dt + e \right) + \cancel{f(x)} \cdot \frac{K(x)}{\cancel{f(x)}} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$K'(x) = f'(x) \cdot \frac{K(x)}{f(x)} + K(x) \Leftrightarrow \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + 1 \Leftrightarrow$$

$$(\ln|K(x)|)' = (x + \ln|f(x)|)'$$

Από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχουμε

$$\ln|K(x)| = x + \ln|f(x)| + c$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι } \ln|K(1)| = 1 + \ln|f(1)| + c \Leftrightarrow$$

$$\ln|-1| = 1 + \ln\left|-\frac{1}{e}\right| + c \Leftrightarrow 0 = 1 - 1 + c \Leftrightarrow c = 0,$$

άρα

$$\ln|K(x)| = x + \ln|f(x)| \Leftrightarrow e^{\ln|K(x)|} = e^{x + \ln|f(x)|} \Leftrightarrow$$

$$|K(x)| = |f(x)| \cdot e^x \begin{matrix} f(x) < 0 \\ \Leftrightarrow \\ K(x) < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow -K(x) = -f(x) \cdot e^x \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot e^x = K(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{K(x)}{e^x} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^{-x} \cdot (\ln x - x), x > 0$$

$$\Delta 2. f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{e^x}{\ln x - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{\ln x - x} = 0,$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[f^2(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right] & \stackrel{\text{Θέτω } \frac{1}{f(x)} = u}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \lim_{u \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{u^2} \cdot \eta\mu u - \frac{1}{u} \right) \\ & = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} \\ & = \frac{1}{2} \cdot \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Δ3. Για $x > 0$ είναι :

$$F'(x) = \left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) = \frac{\ln x - x}{e^x}$$

$$\begin{aligned} F''(x) &= \left(\frac{\ln x - x}{e^x} \right)' = \frac{(\ln x - x)' \cdot e^x - (\ln x - x) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{x} - 1 \right) \cdot e^x - (\ln x - x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - 1 - \ln x + x}{e^x} \\ &= \frac{1 + (x - 1 - \ln x)}{e^x} > 0, \text{ διότι } \ln x \leq x - 1 \end{aligned}$$

άρα η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

1^{ος} τρόπος

$$F(u) = \int_{\alpha}^u f(t) dt, u > 0$$

Η F είναι παραγωγίσιμη στα $[x, 2x]$ και $[2x, 3x]$, $x > 0$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν :

- $x_1 \in (x, 2x)$, τέτοιο ώστε $F'(x_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$
- $x_2 \in (2x, 3x)$, τέτοιο ώστε $F'(x_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$

$$x_1 < x_2 \stackrel{F' \uparrow}{\Rightarrow} F'(x_1) < F'(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow$$

$$F(x) + F(3x) > 2 \cdot F(2x).$$

2^{ος} τρόπος

Η F είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της $M(2\theta, f(2\theta))$, με $\theta > 0$.

$$(\varepsilon) : y - F(2\theta) = F'(2\theta) \cdot (x - 2\theta) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon) : y = F(2\theta) + F'(2\theta) \cdot (x - 2\theta)$$

- $\theta \neq 2\theta$, άρα $F(\theta) > F(2\theta) + F'(2\theta) \cdot (\theta - 2\theta) \Leftrightarrow$

$$F(\theta) > F(2\theta) - \theta \cdot F'(2\theta) \quad (1)$$

- $3\theta \neq 2\theta$, άρα $F(3\theta) > F(2\theta) + F'(2\theta) \cdot (3\theta - 2\theta) \Leftrightarrow$

$$F(3\theta) > F(2\theta) + \theta \cdot F'(2\theta) \quad (2)$$

Από (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$$F(\theta) + F(3\theta) > 2F(2\theta), \text{ για τυχαίο } \theta > 0.$$

Επομένως $F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x > 0$.

Δ4. $F'(x) = f(x) < 0$, άρα F γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Θεωρούμε συνάρτηση Q , με $Q(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$

$Q'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$, άρα Q γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

- Η Q είναι συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$ ως πράξεις συνεχών

- $Q(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$,

διότι $\beta < 3\beta \xrightarrow{F \downarrow} F(\beta) > F(3\beta)$

- $Q(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$, από Δ3 για $x = \beta$

Από Θ. Bolzano η εξίσωση $Q(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\beta, 2\beta)$, η οποία είναι μοναδική αφού η Q είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$, τέτοιο ώστε

$$Q(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) - F(\beta) - F(3\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$