ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Σχολικό βιβλίο σελίδες 260-261**

Α2. **Σχολικό βιβλίο σελίδα 280**

Α3. **α. Σωστό , β. Σωστό, γ. Λάθος,**
δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. 1^{ος} τρόπος

$$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \Leftrightarrow |z-3i| + |z-3i| = 2 \Leftrightarrow$$

$$2|z-3i| = 2 \Leftrightarrow |z-3i| = 1$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 1$

2^{ος} τρόπος

$$|z-3i| + |\bar{z}+3i| = 2 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |x+yi-3i| + |x-yi+3i| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2} + \sqrt{x^2+(3-y)^2} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2 = 1$$

άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 1$

Β2. 1^{ος} τρόπος

$$|z-3i| = 1 \Leftrightarrow |z-3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z-3i)(\bar{z}+3i) = 1 \overset{z-3i\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\bar{z}+3i = \frac{1}{z-3i}$$

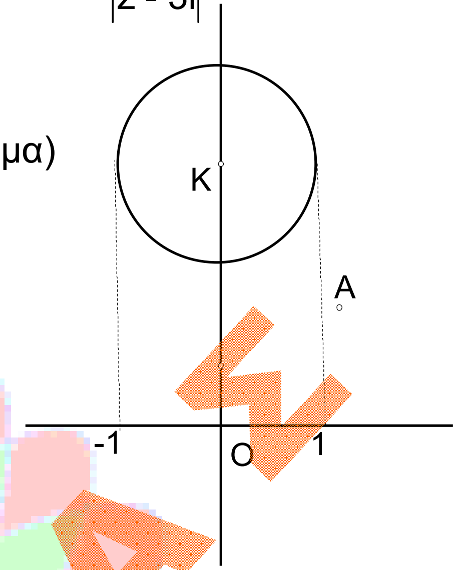
2^{ος} τρόπος

$$\bar{z}+3i = \frac{1}{z-3i} \Leftrightarrow (z-3i)(\bar{z}+3i) = 1 \Leftrightarrow |z-3i|^2 = 1$$

$$\overset{|z-3i|=1}{\Leftrightarrow} 1 = 1 \text{ (ισχύει)}$$

B3. $w = z - 3i + \dfrac{1}{z - 3i} = z - 3i + \dfrac{\bar{z} + 3i}{(z - 3i)(\bar{z} + 3i)} = z - 3i + \dfrac{\bar{z} + 3i}{|z - 3i|^2}$

$= z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$



$1^{ος}$ τρόπος

Από το γ.τ. των εικόνων του z (διπλανό σχήμα) προκύπτει ότι $-1 \le \mathrm{Re}(z) \le 1 \Leftrightarrow$

$-2 \le \mathbf{2}\mathrm{Re}(z) \le 2 \Leftrightarrow$

$\mathbf{-2 \le w \le 2}$

$2^{ος}$ τρόπος

Από το γ.τ. των εικόνων του z έχουμε :

$x^2 + (y - 3)^2 = 1$

άρα $x^2 \le 1 \Leftrightarrow |x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1 \Leftrightarrow$

$-2 \le \mathbf{2}x \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \mathbf{2}\mathrm{Re}(z) \le 2 \Leftrightarrow$

$\mathbf{-2 \le w \le 2}$

$3^{ος}$ τρόπος

$$|w| = \left|z - 3i + \frac{1}{z - 3i}\right| \le |z - 3i| + \left|\frac{1}{z - 3i}\right| = 1 + \frac{1}{|z - 3i|} = 1 + 1 = 2$$

$$|w| \le 2 \overset{w \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \mathbf{-2 \le w \le 2}$$

B4. $|z - w| \underset{w = 2x}{\overset{z = x + yi}{=}} |x + yi - 2x| = |-x + yi| = |-(x - yi)| = |-\bar{z}| = |z|$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow$

$e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow$

$\left[e^x f'(x) - e^x\right]' = [xf'(x)]'$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c_1$

Για $x = 0$ προκύπτει $c_1 = -1$,

άρα $e^x f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) - 1 \Leftrightarrow$

$e^x f'(x) - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow$

$(e^x - x)f'(x) = e^x - 1$ **(1)**

Θα αποδείξουμε ότι $e^x - x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1ος τρόπος

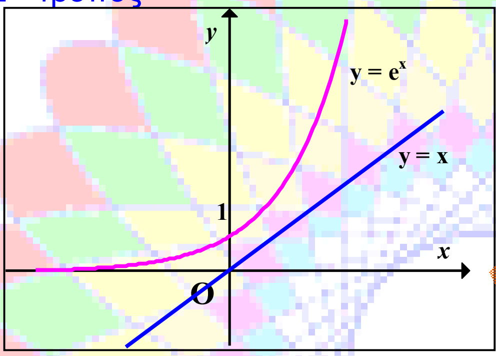
Θεωρούμε συνάρτηση g, με $g(x) = e^x - x$, $x \in IR$

$g'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘		↗

Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $g(0) = 1$, άρα $g(x) \geq 1 > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0$

2ος τρόπος



Από τις γραφικές παραστάσεις των $f_1(x) = e^x$ και $f_2(x) = x$ έχουμε ότι η γραφική παράσταση της f_1 βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f_2, για κάθε $x \in IR$, άρα $e^x > x$

$e^x - x > 0$, για κάθε $x \in IR$.

(1): $(e^x - x)f'(x) = e^x - 1 \overset{e^x - x > 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = \left[\ell n(e^x - x)\right]'$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $f(x) = \ell n(e^x - x) + c_2$

Για $x = 0$ προκύπτει $c_2 = 0$, άρα $\mathbf{f(x) = \ell n(e^x - x), x \in IR}$

Γ2. $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = 0$

Γ3. $f''(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x - x}\right)' = \dfrac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \dfrac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$

Οι ρίζες και το πρόσημο της f'' ταυτίζονται με τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητή.

Θεωρούμε συνάρτηση h, με $h(x) = 2e^x - xe^x - 1,\ x \in IR$

Θα αποδείξουμε ότι η h έχει ακριβώς 2 ρίζες.

1ος τρόπος

$h'(x) = e^x - xe^x = (1 - x)e^x$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	↗		↘

• $\Delta_1 = (-\infty, 1)$

Η h είναι συνεχής και γν. αύξουσα στο Δ_1

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(2 - x)e^x - 1\right]$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2 - x}{e^{-x}} - 1\right) = -1,$

διότι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2 - x}{e^{-x}} \underset{DL'H}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-1}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} h(x) \overset{h\ \text{συνεχής}}{=} h(1) = e - 1$

άρα $h(\Delta_1) = (-1, e - 1)$

$0 \in h(\Delta_1)$, άρα η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ_1 στο Δ_1.

• $\Delta_2 = [1, +\infty)$

Η h είναι συνεχής και γν. φθίνουσα στο Δ_2

$h(1) = e - 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(2 - x)e^x - 1\right] = -\infty$

διότι $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 - x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

άρα $h(\Delta_2) = (-\infty, e - 1]$

$0 \in h(\Delta_2)$, άρα η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ_2 στο Δ_2.

Επομένως η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο IR.

$2^{ος}$ τρόπος

- Η h είναι συνεχής στο $[-2\ ,\ 1]$
- $h(-2) = 2e^{-2} - (-2)e^{-2} - 1 = \dfrac{4}{e^2} - 1 < 0$,

  $h(1) = 2e - e - 1 = e - 1 > 0$

  άρα από Θ. Bolzano η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-2\ ,\ 1) \subseteq \Delta_1$ και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο (Δ_1), άρα η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ_1 στο Δ_1.

- Η h είναι συνεχής στο $[1\ ,\ 2]$
- $h(1) = 2e - e - 1 = e - 1 > 0$

  $h(2) = 2e^2 - 2e^2 - 1 = -1 < 0$

  άρα από Θ. Bolzano η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1\ ,\ 2) \subseteq \Delta_2$ και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο (Δ_2), άρα η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ_2 στο Δ_2.

Επομένως η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο IR.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών ρ_1 και ρ_2.

- $x < \rho_1 \overset{h \uparrow \text{ στο } (-\infty\ ,\ 1)}{\Longleftrightarrow} h(x) < h(\rho_1) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$
- $\rho_1 < x < 1 \overset{h \uparrow \text{ στο } (-\infty\ ,\ 1)}{\Longleftrightarrow} h(x) > h(\rho_1) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$
- $1 < x < \rho_1 \overset{h \downarrow \text{ στο } (1\ ,\ +\infty)}{\Longleftrightarrow} h(x) > h(\rho_1) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$
- $x > \rho_2 \overset{h \downarrow \text{ στο } (1\ ,\ +\infty)}{\Longleftrightarrow} h(x) < h(\rho_2) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	0	-	
f (x)							
			σ.κ.		σ.κ.		

Άρα **η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει ακριβώς δύο σημεία καμπής**.

Γ4. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

- Η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά συνεχών
- $\varphi(0) = f(0) - 1 = -1 < 0$

  $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0$

Από Θ. Bolzano η φ έχει μια τουλάχιστον ρίζα x_0 στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\varphi'(x) = f'(x) + \eta\mu x > 0$, για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

διότι $f'(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\eta\mu x > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα και το x_0 είναι μοναδικό

Επομένως **η εξίσωση $\ell n(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$**.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\dfrac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \displaystyle\int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}\,dt$

θέτουμε $x + t = u$
Είναι $t = u - x$
$dt = du$
$t = 0 \rightarrow u = x$
$t = -x \rightarrow u = 0$

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}\,du \Leftrightarrow \frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = e^{-2x}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}\,du \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \frac{\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}\,du}{e^{2x}} \Leftrightarrow 1 - f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,du \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,du$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις g_1, g_2,

με $g_1(x) = \dfrac{e^{2x}}{g(x)}$ και $g_2(x) = \displaystyle\int_0^x g_1(t)\,dt$.

Η g_1 είναι συνεχής στο IR, ως πράξεις συνεχών.

άρα η g_2 είναι παρ/μη στο IR με $g_2'(x) = g_1(x) = \dfrac{e^{2x}}{g(x)}$

Η συνάρτηση f, με $f(x) = 1 + g_2(x)$ είναι παρ/μη στο IR ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x) = [1 + g_2(x)]' = g_2'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Rightarrow f'(x) \cdot g(x) = e^{2x} \quad \textbf{(1)}$$

Με όμοιο τρόπο προκύπτει ότι η g είναι παραγωγίσιμη και

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \quad \text{και} \quad f(x) \cdot g'(x) = e^{2x} \quad \textbf{(2)}$$

1ος τρόπος

Από τις (1) και (2) με αφαίρεση προκύπτει

$$f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = 0 \overset{\substack{\text{συνέπειες} \\ \text{Θ.Μ.Τ.}}}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Για $x = 0$ προκύπτει $\frac{f(0)}{g(0)} = c \Leftrightarrow \frac{1}{1} = c \Leftrightarrow 1 = c$

άρα **f (x) = g (x), για κάθε x $\in$ IR**.

2ος τρόπος

Από τις (1) και (2) με προκύπτει

$$f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g'(x) \underset{g(x) > 0}{\overset{f(x) > 0}{\Leftrightarrow}} \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$[\ell n f(x)]' = [\ell n g(x)]' \overset{\substack{\text{συνέπειες} \\ \text{Θ.Μ.Τ.}}}{\Rightarrow} \ell n f(x) = \ell n g(x) + c$$

Για $x = 0$ προκύπτει $\ell n f(0) = \ell n g(0) + c \Leftrightarrow 0 = c$

άρα $\ell n f(x) = \ell n g(x) \Leftrightarrow$ **f (x) = g (x), για κάθε x $\in$ IR**.

Δ2. Από τη σχέση (1) προκύπτει $f(x)\cdot f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow$

$$2f(x)\cdot f'(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow \left[f^2(x)\right]' = \left(e^{2x}\right)'$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. προκύπτει $f^2(x) = e^{2x} + c_1$

Για $x = 0$, έχουμε $f^2(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow 0 = c_1$

Άρα $f^2(x) = e^{2x} \Leftrightarrow f^2(x) = \left(e^x\right)^2$ και επειδή $f(x) > 0$

θα είναι **$f(x) = e^x$, για κάθε $x \in IR$.**

Δ3.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ell n\, f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ell n\, e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

θέτουμε $\frac{1}{x} = u$
Όταν $x \to 0^-$ τότε $u \to -\infty$

$$= \lim_{u\to -\infty}\frac{\frac{1}{u}}{e^u} = \lim_{u\to -\infty}\frac{e^{-u}}{u} \underset{DL'H}{=} \lim_{u\to -\infty}\frac{-e^{-u}}{1} = -\infty$$

Δ4. $F(x) = \int_1^x f(t^2)\,dt = \int_1^x e^{t^2}\,dt$

$F'(x) = \left(\int_1^x e^{t^2}\,dt\right)' = e^{x^2} > 0$, άρα F γνησίως αύξουσα στο IR

Αναζητούμε το πρόσημο της F στο $[0, 1]$

$$0 \leq x \leq 1 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(0) \leq F(x) \leq F(1) \Rightarrow F(x) \leq 0$$

$$E = -\int_0^1 F(x)\,dx = -\int_0^1 (x)'\cdot F(x)\,dx$$

$$= -\left[x\cdot F(x)\right]_0^1 + \int_0^1 x\cdot F'(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\mathbf{e-1}}{\mathbf{2}}\ \textbf{τ.μ.}$$