

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 304**

**A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 279**

**A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 273**

**A4. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος,  
δ. Λάθος, ε. Σωστό.**

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.**  $z + \frac{2}{z} = 2 \Leftrightarrow z^2 + 2 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = -4$  και  $z_{1,2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

**B2.**  $z_1^{2010} + z_2^{2010} = (1+i)^{2010} + (1-i)^{2010}$   
 $= [(1+i)^2]^{1005} + [(1-i)^2]^{1005}$   
 $= (2i)^{1005} + (-2i)^{1005}$   
 $= (2i)^{1005} - (2i)^{1005}$   
 $= 0$

**B3.**  $|z_1 - z_2| = |1+i - (1-i)| = |2i| = 2$   
 $|w - 4 + 3i| = 2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $w$  είναι ο κύκλος με κέντρο  $K(4, -3)$  και ακτίνα  $\rho = 2$ .

**B4. 1ος τρόπος**

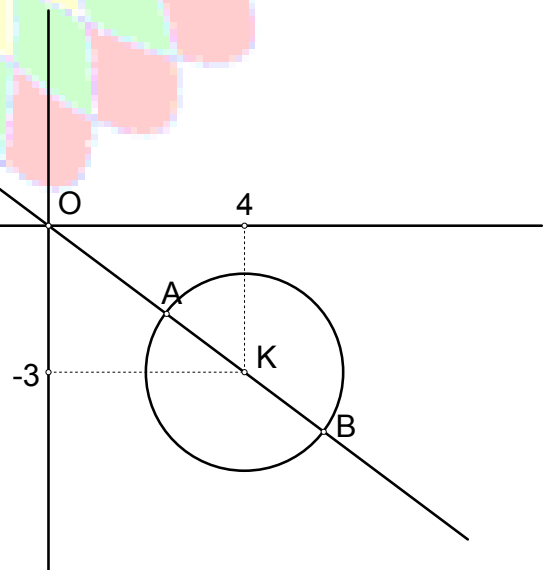
$(OK) = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = 5$

$|w|_{\min} = (OA) = (OK) - \rho = 3$

$|w|_{\max} = (OB) = (OK) + \rho = 7$

άρα

$3 \leq |w| \leq 7$



2<sup>ος</sup> τρόπος

$$|w| = |(w - 4 + 3i) + (4 - 3i)|$$

Είναι

$$||w - 4 + 3i| - |4 - 3i|| \leq |w| \leq |w - 4 + 3i| + |4 - 3i| \Leftrightarrow$$

$$|2 - 5| \leq |w| \leq 2 + 5 \Leftrightarrow$$

$$3 \leq |w| \leq 7$$

### ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. f'(x) = [2x + \ln(x^2 + 1)]' = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

Το τριώνυμο  $x^2 + x + 1$  έχει  $\Delta < 0$ , άρα είναι θετικό για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Είναι  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Επομένως η **f** είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

$$\Gamma 2. 2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right] \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 6x + 4 = \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + \ln[(x^2)^2 + 1] = 2(3x - 2) + \ln[(3x - 2)^2 + 1] \Leftrightarrow$$

$f(x^2) = f(3x - 2)$  και επειδή η  $f$  είναι "1-1" ως γνησίως αύξουσα

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$$

$$\Gamma 3. f''(x) = \left(2 + \frac{2x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+	○
f(x)	↘		↗	

σ.κ.

σ.κ.

σημεία καμπής **A (-1, -2 + ln2)** και **B (1, 2 + ln2)**

$$\text{Στο A} \rightarrow (\varepsilon_1): y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1) \Leftrightarrow$$

$$y - (-2 + \ln 2) = 1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{y = x - 1 + \ln 2}$$

$$\text{Στο B} \rightarrow (\varepsilon_2): y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$y - (2 + \ln 2) = 3 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{y = 3x - 1 + \ln 2}$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων των  $(\varepsilon_1)$  και  $(\varepsilon_2)$  βρίσκουμε ότι οι ευθείες τέμνονται στο σημείο  $\Gamma (0, -1 + \ln 2)$ , το οποίο βρίσκεται στον άξονα  $y'y$ .

$$\Gamma 4. I = \int_{-1}^1 x \cdot f(x) dx = \int_{-1}^1 x \cdot [2x + \ln(x^2 + 1)] dx$$

$$= \int_{-1}^1 [2x^2 + x \ln(x^2 + 1)] dx = \int_{-1}^1 2x^2 dx + \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx$$

1<sup>ος</sup> τρόπος

$$= \left[ \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [(x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1) - (x^2 + 1)]' dx$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1) - (x^2 + 1)]_{-1}^1 = \frac{4}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

$$= \left[ \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 1)' \cdot \ln(x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 1) \cdot [\ln(x^2 + 1)]' dx$$

$$= \frac{4}{3} + 0 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 1) \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{4}{3} - \int_{-1}^1 x dx = \frac{4}{3} - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} - 0 + 0 = \frac{4}{3}$$

3<sup>ος</sup> τρόπος

$$= \left[ \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2)' \cdot \ln(x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{2} [x^2 \cdot \ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 \cdot [\ln(x^2 + 1)]' dx$$

$$= \frac{4}{3} + 0 - \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{4}{3} - \int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \frac{4}{3} - \int_{-1}^1 \frac{x^3 + x - x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{4}{3} - \int_{-1}^1 \left( x - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{4}{3} - \int_{-1}^1 x dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

$$= \frac{4}{3} - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_{-1}^1 = \frac{4}{3} - 0 + 0 = \frac{4}{3}$$

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $g_1, g_2$ ,

$$\text{με } g_1(x) = \frac{x}{f(x) - x} \text{ και } g_2(x) = \int_0^x g_1(t) dt.$$

Η  $g_1$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , ως πράξεις συνεχών.

άρα η  $g_2$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $g_2'(x) = g_1(x) = \frac{x}{f(x) - x}$

Η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = x + 3 + g_2(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x + 3 + g_2(x)]' = 1 + g_2'(x) = 1 + \frac{x}{f(x) - x} \\ &= \frac{f(x) - x + x}{f(x) - x} = \frac{f(x)}{f(x) - x} \end{aligned}$$

**Δ2.** Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως πράξεις συνεχών.

$$\begin{aligned} g'(x) &= [f^2(x) - 2x \cdot f(x)]' = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2x \cdot f'(x) \\ &= 2[f(x) - x] \cdot f'(x) - 2f(x) = 2[f(x) - x] \cdot \frac{f(x)}{f(x) - x} - 2f(x) \\ &= 2f(x) - 2f(x) = 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι σταθερή στο } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Δ3.** Στη σχέση  $f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$  για  $x = 0$ , προκύπτει  $f(0) = 3$

$$g(0) = f^2(0) - 2 \cdot 0 \cdot f(0) = 9$$

άρα  $g(x) = 9$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$f^2(x) - 2x \cdot f(x) = 9, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f^2(x) - 2x \cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) - x]^2 = x^2 + 9, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h$ , με  $h(x) = f(x) - x, x \in \mathbb{R}$

Είναι  $f(x) \neq x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα η  $h$  δεν έχει ρίζες στο  $\mathbb{R}$ .

Η  $h$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως διαφορά συνεχών

από συνέπειες Θ. Bolzano η  $h$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$  και επειδή  $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$ , θα είναι  $h(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Από τη σχέση (1) προκύπτει  $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

άρα  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

#### Δ4. 1<sup>ος</sup> τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\Phi$ , με  $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$

- η  $\Phi$  είναι συνεχής στο  $[x, x+1]$
  - η  $\Phi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(x, x+1)$  με  $\Phi'(x) = f(x)$
- από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi_1 \in (x, x+1)$ , τέτοιο ώστε

$$\Phi'(\xi_1) = \frac{\int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt}{x+1-x} \Leftrightarrow \Phi'(\xi_1) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

- η  $\Phi$  είναι συνεχής στο  $[x+1, x+2]$
  - η  $\Phi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(x+1, x+2)$
- από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi_2 \in (x+1, x+2)$ , τέτοιο ώστε

$$\Phi'(\xi_2) = \frac{\int_0^{x+2} f(t) dt - \int_0^{x+1} f(t) dt}{x+2-(x+1)} \Leftrightarrow \Phi'(\xi_2) = \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt$$

$$\Phi'(x) = f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$$

$$\Phi''(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} > 0$$

$$\text{διότι } \sqrt{x^2 + 9} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$$

άρα η  $\Phi'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Είναι } x < \xi_1 < x+1 < \xi_2 < x+2$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{\Phi' \uparrow}{\Leftrightarrow} \Phi'(\xi_1) < \Phi'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt$$

## 2<sup>ος</sup> τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $Q$ , με  $Q(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$Q(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt = \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

$$Q'(x) = f(x+1) \cdot (x+1)' - f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} > 0$$

$$\text{διότι } \sqrt{x^2 + 9} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$$

άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

$$x < x+1 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) > 0$$

Είναι  $Q'(x) > 0$ , άρα η  $Q$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

$$x < x+1 \stackrel{Q \uparrow}{\Leftrightarrow} Q(x) < Q(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt$$

## 3<sup>ος</sup> τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $Q$ , με  $Q(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$Q(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt = \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt$$

$$Q'(x) = f(x+1) \cdot (x+1)' - f(x) = f(x+1) - f(x)$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ με την  $f$  στο διάστημα  $[x, x+1]$

υπάρχει  $\xi \in (x, x+1)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right)' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} > 0$$

$$\text{διότι } \sqrt{x^2 + 9} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$$

Είναι  $Q'(x) = f'(\xi) > 0$ , άρα η  $Q$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

$$x < x+1 \stackrel{Q \uparrow}{\Leftrightarrow} Q(x) < Q(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt$$