ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 235
Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 191
Β. α. ΣΩΣΤΟ
β. ΣΩΣΤΟ
γ. ΛΑΘΟΣ
δ. ΛΑΘΟΣ
ε. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\left|(i+2\sqrt{2})z\right| = 6 \Leftrightarrow \left|i+2\sqrt{2}\right|\cdot|z| = 6 \Leftrightarrow$

$\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}\cdot|z| = 6 \Leftrightarrow 3\cdot|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$

Άρα ο γ.τ. των εικόνων του z είναι
ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β. Ο γ.τ. των εικόνων του w είναι **η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1,-1)$ και $B(3,-3)$.**

$|w-(1-i)| = |w-(3-3i)| \overset{w=x+yi}{\Leftrightarrow}$

$|x+yi-1+i| = |x+yi-3+3i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow$

$(x-1)^2+(y+1)^2 = (x-3)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow$

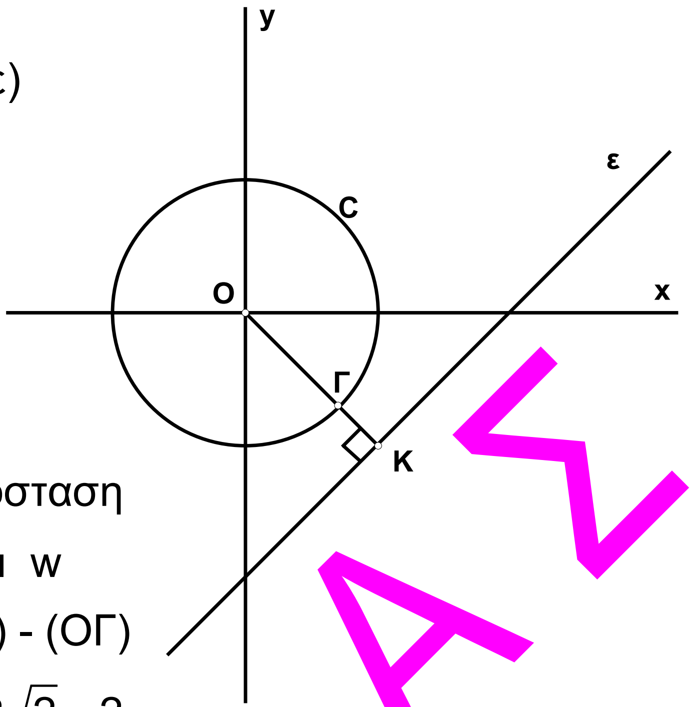
$x^2-2x+1+y^2+2y+1 = x^2-6x+9+y^2+6y+9 \Leftrightarrow$

$4x-4y-16=0 \Leftrightarrow \mathbf{x-y-4=0\ (\varepsilon)}$

γ. $|w|_{min} = (OK) = d(O, \varepsilon)$

$$= \frac{|0 - 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



δ. Το $|z - w|$ είναι η απόσταση των εικόνων των z και w

$|z - w|_{min} = (ΓK) = (OK) - (OΓ)$

$= (OK) - \rho = 2\sqrt{2} - 2$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x\ell nx) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ell nx}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L' Hospital}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ell nx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0 = f(0)$,

άρα η f είναι συνεχής στο 0.

β. Για $x > 0$ είναι $f'(x) = (x\ell nx)' = \ell nx + 1$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ell nx + 1 > 0 \Leftrightarrow \ell nx > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

X	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

- Στο $\Delta_1 = [0\ ,\ 1/e)$ η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} f(x) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ell n\frac{1}{e} = -\frac{1}{e} \end{array}\right\} \text{ άρα } f(\Delta_1) = \left(-\frac{1}{e}\ ,\ 0\right].$$

- Στο $\Delta_2 = [1/e\ ,\ +\infty)$ η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x\ell nx) = +\infty$, διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ell nx) = +\infty$

άρα $f(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{e}\ ,\ +\infty\right)$.

Επομένως $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{e}\ ,\ +\infty\right)$

γ. $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ell nx = \ell ne^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ell nx = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow$

$x\ell nx = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$, τότε $\alpha \notin f(A)$, άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \notin f(\Delta_1) \\ \alpha \in f(\Delta_2),\ f \uparrow \text{ στο } \Delta_2 \end{array}\right\} \text{ άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.}$$

- Αν $-\frac{1}{e} < \alpha < 0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \in f(\Delta_1),\ f \downarrow \text{ στο } \Delta_1 \\ \alpha \in f(\Delta_2),\ f \uparrow \text{ στο } \Delta_2 \end{array}\right\} \text{ άρα η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες}$$

- Αν $\alpha = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \in f(\Delta_1),\ f \downarrow \text{ στο } \Delta_1 \\ \alpha \in f(\Delta_2),\ f \uparrow \text{ στο } \Delta_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{και επειδή η ρίζα στο } \Delta_1 \text{ είναι το } 0, \\ \text{άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα} \end{array}$$

- Αν $\alpha > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \notin f(\Delta_1) \\ \alpha \in f(\Delta_2),\ f \uparrow \text{ στο } \Delta_2 \end{array}\right\} \text{ άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.}$$

δ. $f'(x) = \ell n x + 1,\ x > 0.$

$f''(x) = (\ell n x + 1)' = \dfrac{1}{x} > 0$, άρα η f' είναι γν. αύξουσα στο $(0\ ,\ +\infty)$

Από Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[x\ ,\ x + 1]$, $x > 0$
υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x\ ,\ x + 1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x + 1) - f(x)}{x + 1 - x} = f(x + 1) - f(x)$$

Είναι $x < \xi < x + 1$ και f' είναι γνησίως αύξουσα,
άρα $f'(\xi) < f'(x + 1) \iff f(x + 1) - f(x) < f'(x + 1)$

ΘΕΜΑ 4^o

α. Έστω ότι $\int_0^2 f(x)\,dx = \alpha \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x) = \alpha(10x^3 + 3x) - 45 = 10\alpha x^3 + 3\alpha x - 45.$

Είναι $\alpha = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (10\alpha x^3 + 3\alpha x - 45)\,dx$

$$= \left[\frac{10\alpha x^4}{4} + \frac{3\alpha x^2}{2} - 45x\right]_0^2 = 40\alpha + 6\alpha - 90 = 46\alpha - 90$$

$\alpha = 46\alpha - 90 \iff -45\alpha = -90 \iff \alpha = 2.$

Επομένως $f(x) = 20x^3 + 6x - 45.$

β. $$g''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x + h) - g'(x)}{h} \underset{\text{όταν } h \to 0,\ \text{τότε } t \to 0}{\overset{h = -t}{=}} \lim_{t \to 0} \frac{g'(x - t) - g'(x)}{-t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{g'(x) - g'(x - t)}{t} = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x - h)}{h}$$

$$\text{γ. i. } \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L' Hospital}}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{h}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[g''(x)+g''(x)\right] = g''(x)$$

$f(x) + 45 = 20x^3 + 6x$

Είναι

- $g''(x) = 20x^3 + 6x \;\Leftrightarrow\; g''(x) = (5x^4 + 3x^2)'$,
  άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1$
  και για $x = 0$, $g'(0) = c_1 = 1$, άρα $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$
- $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; g'(x) = (x^5 + x^3 + x + c_2)'$,
  άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. $g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$
  και για $x = 0$, $g(0) = c_2 = 1$, άρα $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii. $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η g είναι "1 - 1".