

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
 ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
 ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1°

- A.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 98
 A.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141
 A.3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 280
 B. α. ΛΑΘΟΣ
 β. ΛΑΘΟΣ
 γ. ΛΑΘΟΣ

(Έπρεπε να έλεγε ότι η g είναι συνεχής στο f(x₀))

- δ. ΣΩΣΤΟ
 ε. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2°

α. $|z| = \left| \frac{2 + \alpha i}{\alpha + 2i} \right| = \frac{|2 + \alpha i|}{|\alpha + 2i|} = \frac{\sqrt{2^2 + \alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 2^2}} = 1$

β. $z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{-2i^2}{2i} = -i$ και $z_2 = \frac{2 + 2i}{2 + 2i} = 1$

i) $|z_2 - z_1| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

ii) $(z_1)^{2v} = (-i)^{2v} = i^{2v} = (i^2)^v = (-1)^v = (-z_2)^v$

ΘΕΜΑ 3°

α. $f'(x) = 3x^2 - 3$
 $f''(x) = 6x$

x	-∞	-1	0	1	+∞
f'(x)	+	○	-	○	+
f''(x)	-		-	○	+
f(x)					

β. • $\Delta_1 = (-\infty, -1)$

Η f είναι γν. αύξουσα στο Δ_1

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$$

άρα $f(\Delta_1) = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$0 \in f(\Delta_1)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1 .

• $\Delta_2 = [-1, 1]$

Η f είναι γν. φθίνουσα στο Δ_2

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$$

$$f(1) = 1^3 - 3 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta < 0$$

άρα $f(\Delta_2) = (-2 - 2\eta\mu^2\theta, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$0 \in f(\Delta_2)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2 .

• $\Delta_3 = (1, +\infty)$

Η f είναι γν. αύξουσα στο Δ_3

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = -2 - 2\eta\mu^2\theta < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = +\infty$$

άρα $f(\Delta_3) = (-2 - 2\eta\mu^2\theta, +\infty)$

$0 \in f(\Delta_3)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_3 .

Επομένως η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο \mathbb{R} .

γ. Τα ζητούμενα σημεία είναι :

$A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1, -2 - 2\eta\mu^2\theta)$ και $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$

Οι συντεταγμένες των A, B, Γ ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon) : y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$, άρα τα A, B, Γ βρίσκονται στην (ε) .

δ. Θεωρούμε $g(x) = f(x) - (-2x - 2\eta\mu^2\theta) = x^3 - x$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	\circ	$+$	\circ	$+$

$$E = \int_{-1}^0 g(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \dots = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Για $x \in [0, 1]$ είναι :

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array} \right\} \text{άρα } f(x) \cdot g(x) > 0$$

Για $x \in (0, 1]$ είναι $f(x) \cdot g(x) > 0$ άρα:

$$\int_0^x f(x) \cdot g(x) dx > 0 \Leftrightarrow F(x) > 0$$

β. $0 \leq t \leq x \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(t) \leq f(x) \stackrel{g(t) > 0}{\Leftrightarrow} f(t) \cdot g(t) \leq f(x) \cdot g(t) \Leftrightarrow$
 $f(x) \cdot g(t) - f(t) \cdot g(t) \geq 0$

Θεωρώ $\varphi(t) = f(x) \cdot g(t) - f(t) \cdot g(t), t \in [0, x]$

Η φ είναι συνεχής στο $[0, x]$ ως πράξεις συνεχών

Είναι $\varphi(t) \geq 0$ και για $x > 0$, η φ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0, x]$

$$\text{άρα } \int_0^x \varphi(t) dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x [f(x) \cdot g(t) - f(t) \cdot g(t)] dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x f(x) \cdot g(t) dt - \int_0^x f(t) \cdot g(t) dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x f(x) \cdot g(t) dt > \int_0^x f(t) \cdot g(t) dt \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot \int_0^x g(t) dt > F(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

γ. Θεωρούμε συνάρτηση H , με $H(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{F'(x) \cdot G(x) - F(x) \cdot G'(x)}{[G(x)]^2} = \frac{f(x) \cdot g(x) \cdot G(x) - F(x) \cdot g(x)}{[G(x)]^2} \\ &= g(x) \cdot \frac{f(x) \cdot G(x) - F(x)}{[G(x)]^2} > 0 \end{aligned}$$

διότι $g(x) > 0$ και $f(x) \cdot G(x) > F(x)$ από (β') ερώτημα

Άρα η H είναι γν. αύξουσα στο $[0, 1]$

$$x \leq 1 \stackrel{H \uparrow}{\Leftrightarrow} H(x) \leq H(1) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

$$\delta. L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t) \cdot g(t) dt \right) \left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\int_0^x f(t) \cdot g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \cdot \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) \cdot g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) \cdot g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{\text{f συνεχής}}{=} f(0)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} = \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4}{x^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\text{Άρα } L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) \cdot g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} = f(0) \cdot 0 = 0$$

ΚΕΕΕΛΛΑΑ