ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005

ΘΕΜΑ 1^{o}

A.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 194
A.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 280
B. α. ΛΑΘΟΣ, **β.** ΛΑΘΟΣ, **γ.** ΣΩΣΤΟ, **δ.** ΣΩΣΤΟ, **ε.** ΛΑΘΟΣ, **στ.** ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2^{o}

α. $|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 9 \overset{z_1 \neq 0}{\Leftrightarrow} \bar{z}_1 = \dfrac{9}{z_1}$

β. 1^{ος} τρόπος

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}+\frac{z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}+\frac{z_2\bar{z}_1}{|z_1|^2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{9}+\frac{z_2\bar{z}_1}{9}$$

$$= \frac{z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1}{9} = \frac{2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)}{9} \in IR$$

2^{ος} τρόπος

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1}{z_2}+\frac{\frac{9}{\bar{z}_2}}{\frac{9}{\bar{z}_1}} = \frac{z_1}{z_2}+\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1}{z_2}+\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \in IR$$

3^{ος} τρόπος

$$w = \bar{w} \Leftrightarrow w - \bar{w} = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow w \in IR$$

$$\overline{\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}}+\frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1} \text{ άρα } \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1} \in IR$$

γ.

$$|z_1+z_2+z_3| = \left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right| = |\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3| = \left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|$$

$$= 9\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1z_2z_3}\right| = 9\,\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}$$

$$= 9\,\frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{3\cdot3\cdot3} = \frac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{3}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x}(\lambda x)' = \lambda \cdot e^{\lambda x} > 0$, άρα η f είναι γν. αύξουσα στο IR.

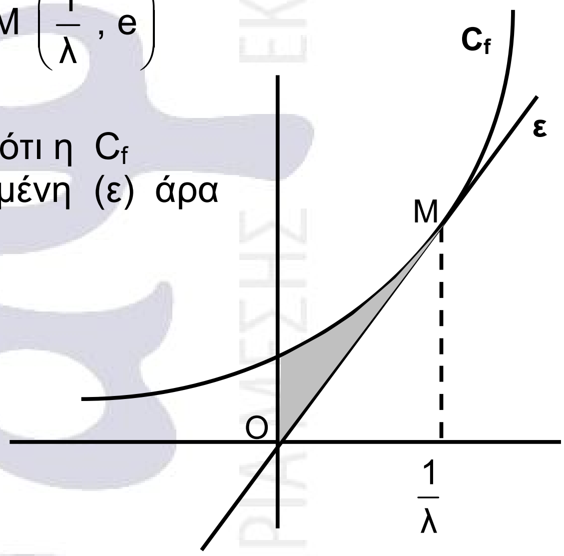
β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(x_0, f x_0)$ είναι

$(\varepsilon): \ y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ **(1)**.

$O(0, 0) \in (\varepsilon)$ άρα $-f(x_0) = -f'(x_0) \cdot x_0 \Leftrightarrow -e^{\lambda x} = -\lambda \cdot x_0 \cdot e^{\lambda x} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}$

$$(1) \overset{x_0 = \frac{1}{\lambda}}{\Rightarrow} y - f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = f'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y - e = \lambda e\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y = \lambda e x$$

σημείο επαφής $M\left(\frac{1}{\lambda}, f\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \to M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$



γ. 1ος τρόπος

Από το διπλανό σχήμα βλέπουμε ότι η C_f βρίσκεται "πάνω" από την εφαπτομένη (ε) άρα

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - e\lambda x)\,dx$$

$$= \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - e\lambda\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$= \frac{e}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}$$

2ος τρόπος

$f''(x) = (\lambda e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}(\lambda x)' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο IR.
Επομένως οποιαδήποτε εφαπτόμενη της C_f βρίσκεται "κάτω" από τη γραφική παράσταση της f. Δηλαδή $f(x) \geq e\lambda x$, για κάθε $x \in IR$

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - e\lambda x)\,dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - e\lambda\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{e}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda}$$

δ. $$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \frac{e-2}{2} \cdot \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty$$ διότι :

- Είναι $e > 2$ άρα $\frac{e-2}{2} > 0$
- $-1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \eta\mu\lambda \leq 3 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{2+\eta\mu\lambda} \geq \frac{1}{3} \overset{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \frac{\lambda}{3} \leq \frac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} \leq \lambda$

$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda}{3} = +\infty$ άρα $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

α. $2f'(x)=e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2e^{f(x)}f'(x)=e^{x} \Leftrightarrow \left(2e^{f(x)}\right)'=\left(e^{x}\right)'$,

άρα $2e^{f(x)}=e^{x}+c \quad (1)$

$(1)\overset{x=0}{\Rightarrow} 2e^{f(0)}=e^{0}+c \Leftrightarrow 2=1+c \Leftrightarrow c=1$

$(1)\overset{c=1}{\Rightarrow} 2e^{f(x)}=e^{x}+1 \Leftrightarrow e^{f(x)}=\dfrac{e^{x}+1}{2}$ άρα $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^{x}+1}{2}\right)$

β. $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)\,dt}{\eta\mu x}\ \underset{\substack{t=0\to u=x\\ t=x\to u=0}}{\overset{\substack{u=x-t\\ dt=-du}}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{-\int_x^0 f(u)\,du}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{\eta\mu x}$$

$$\underset{L'Hospital}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)^*}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(u)\,du\right)'}{(\eta\mu x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\ \overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=}\ \frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{0}{1}=0$$

∗ Η συνάρτηση $Q(x)=\int_0^x f(u)\,du$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη με

$Q'(x)=\left(\int_0^x f(u)\,du\right)'=f(x)$

γ. $h(x)=\int_{-x}^{x} t^{2005}f(t)dt=\int_0^x t^{2005}f(t)\,dt-\int_0^{-x} t^{2005}f(t)\,dt$

$$h'(x)=\left(\int_0^x t^{2005}f(t)dt-\int_0^{-x} t^{2005}f(t)dt\right)'=\left(\int_0^x t^{2005}f(t)dt\right)'-\left(\int_0^{-x} t^{2005}f(t)dt\right)'$$

$$=x^{2005}f(x)-(-x)^{2005}f(-x)\cdot(-x)'=x^{2005}\left[f(x)-f(-x)\right]$$

$$=x^{2005}\left[\ln\left(\frac{e^{x}+1}{2}\right)-\ln\left(\frac{e^{-x}+1}{2}\right)\right]=x^{2005}\ln\left(\frac{\frac{e^{x}+1}{2}}{\frac{e^{-x}+1}{2}}\right)$$

$$=x^{2005}\ln\left(\frac{e^{x}+1}{\frac{1}{e^{x}}+1}\right)=x^{2005}\ln\left(\frac{e^{x}+1}{\frac{e^{x}+1}{e^{x}}}\right)=x^{2005}\ln e^{x}=x^{2005}\cdot x=x^{2006}$$

$g'(x)=\left(\dfrac{x^{2007}}{2007}\right)'=x^{2006}$, επομένως $h'(x)=g'(x)$ άρα $h(x)=g$

δ. Από το (γ) ερώτημα η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$g(x) = \frac{1}{2008}$.

1^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = g(x) - \frac{1}{2008}$

- φ συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών
- $\left.\begin{aligned} &\varphi(0) = g(0) - \frac{1}{2008} = -\frac{1}{2008} < 0 \\ &\varphi(1) = g(1) - \frac{1}{2008} = \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(0)\cdot\varphi(1) < 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$,
τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$ (2)

$\varphi'(x) = g'(x) = x^{2006} > 0$ στο $(0, 1)$
άρα η $\varphi(x) = 0$ έχει το πολύ μια λύση στο $(0, 1)$ (3)
Από (2) και (3) προκύπτει ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0, 1)$

2^{ος} τρόπος

- g συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών
- $g(0) = 0$, $g(1) = \frac{1}{2007}$ και $g(0) = 0 < \frac{1}{2008} < \frac{1}{2007} = g(1)$

από Θ. ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον

$x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $g(x_0) = \frac{1}{2008}$ (4)

$g'(x) = x^{2006} > 0$ στο $(0, 1)$

άρα η $g(x) = \frac{1}{2008}$ έχει το πολύ μια λύση στο $(0, 1)$ (5)

Από (4), (5) προκύπτει ότι η εξίσωση $g(x) = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0, 1)$