

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 27 ΜΑΪΟΥ 2004
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 260 - 261

A.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 213

Γ. α. ΣΩΣΤΟ, **β.** ΣΩΣΤΟ, **γ.** ΛΑΘΟΣ, **δ.** ΛΑΘΟΣ, **ε.** ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2^ο


α. Πρέπει $x > 0$ άρα $D_f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}$$

$$= 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
f'(x)		-	+
f(x)			



Ολικό ελάχιστο

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

β. $f''(x) = [x \cdot (2 \ln x + 1)]' = (x)' \cdot (2 \ln x + 1) + x \cdot (2 \ln x + 1)'$

$$= 2 \ln x + 1 + 2 = 2 \ln x + 3$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

x	0	$\frac{1}{e\sqrt{e}}$	$+\infty$
f''(x)		-	+
f(x)			

$$f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right)^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e^3} \cdot \ln e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$$

άρα έχει σημείο καμπής A $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

γ. ♦ Στο διάστημα $\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ η f είναι συνεχής και γν. φθίνουσα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-2x^3} = 0$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

$$f(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right)$$

♦ Στο διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ η f είναι συνεχής και γν. αύξουσα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

$$f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

$$\text{Επομένως } f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. $g'(x) = (e^x \cdot f(x))' = (e^x)' \cdot f(x) + e^x \cdot f'(x) = e^x (f(x) + f'(x))$

• η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$

• $g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

Από Θ. Rolle προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$,

τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi (f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$

$$\begin{aligned}
 \beta. I(\alpha) &= \int_{\alpha}^0 g(x) dx = \int_{\alpha}^0 e^x \cdot f(x) dx \\
 &= \int_{\alpha}^0 e^x \cdot (2x^2 - 3x) dx = \int_{\alpha}^0 (e^x)' \cdot (2x^2 - 3x) dx \\
 &= \left[e^x \cdot (2x^2 - 3x) \right]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 e^x \cdot (2x^2 - 3x)' dx \\
 &= 0 - e^{\alpha} \cdot (2\alpha^2 - 3\alpha) - \int_{\alpha}^0 e^x \cdot (4x - 3) dx \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^0 e^x \cdot (4x - 3) dx &= \int_{\alpha}^0 (e^x)' \cdot (4x - 3) dx \\
 &= \left[e^x \cdot (4x - 3) \right]_{\alpha}^0 - \int_{\alpha}^0 e^x \cdot (4x - 3)' dx \\
 &= -3 - e^{\alpha} \cdot (4\alpha - 3) - \int_{\alpha}^0 4e^x dx \\
 &= -3 - e^{\alpha} \cdot (4\alpha - 3) - 4 \left[e^x \right]_{\alpha}^0 \\
 &= -3 - e^{\alpha} \cdot (4\alpha - 3) - 4 + 4e^{\alpha} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Από (1) και (2) έχουμε :

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) &= -e^{\alpha} \cdot (2\alpha^2 - 3\alpha) + 3 + e^{\alpha} \cdot (4\alpha - 3) + 4 - 4e^{\alpha} \\
 &= e^{\alpha} \cdot (-2\alpha^2 + 3\alpha + 4\alpha - 3 - 4) + 4 + 3 \\
 &= e^{\alpha} \cdot (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7
 \end{aligned}$$

$$\gamma. \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left[e^{\alpha} \cdot (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) \right] = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^2 + 7\alpha - 7}{e^{-\alpha}} \quad \begin{matrix} \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) \\ = \\ \text{L' Hospital} \end{matrix}$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4\alpha + 7}{-e^{-\alpha}} \quad \begin{matrix} \left(\frac{+\infty}{-\infty} \right) \\ = \\ \text{L' Hospital} \end{matrix}$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-4}{e^{-\alpha}} = -4 \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{\alpha} = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha) = 7 + \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left[e^{\alpha} \cdot (-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) \right] = 7 + 0 = 7$$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\alpha. g(x) = \left| z \right| \cdot \int_1^{x^3} f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x - 1)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο \mathbb{R}

Η $h(x) = \left| z \right| \cdot \int_1^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

Η $t(x) = x^3$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}

Η $\varphi(x) = \left| z \right| \cdot \int_1^{x^3} f(t) dt$ είναι παρ/μη στο \mathbb{R} ως σύνθεση των h και t

Η $s(x) = 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x - 1)$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική

Άρα η g είναι παρ/μη στο \mathbb{R} ως διαφορά των παρ/μων φ και s .

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left[\left| z \right| \cdot \int_1^{x^3} f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x - 1) \right]' \\ &= \left| z \right| \cdot \left[\int_1^{x^3} f(t) dt \right]' - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x - 1)' \\ &= 3 \cdot \left| z \right| \cdot x^2 f(x^3) - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| \end{aligned}$$

β. Παρατηρούμε ότι

$$g(x) = \int_1^{x^3} \left| z \right| f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x - 1) \geq 0 = g(1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ και επειδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Fermat, προκύπτει ότι $g'(1) = 0$.

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \left| z \right| \cdot f(1) - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| = 0 \Leftrightarrow \left| z \right| = \left| z + \frac{1}{z} \right|.$$

$$\gamma. \left| z \right|^2 = \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) \Leftrightarrow z\bar{z} = z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}} \Leftrightarrow z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + \overline{z^2} = -1$$

$$\alpha' \text{ \acute{t}ροπος : } 2 \operatorname{Re}(z^2) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$$

β' τρόπος : $z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta i$

$$(\alpha + \beta i)^2 + (\alpha - \beta i)^2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta i - \beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta i - \beta^2 = -1 \Leftrightarrow$$

$$2(\alpha^2 - \beta^2) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$$

δ. Θα δείξουμε ότι $\beta < 0$.

$$\text{Είναι } \alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0.$$

Όμως $\alpha - \beta > 0$ διότι $\alpha > \beta$, άρα $\alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow \beta < -\alpha < 0$.

- Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$
- $f(2) = \alpha > 0$ και $f(3) = \beta < 0$

Από Θ. Bolzano για την f στο διάστημα $[2, 3]$ προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2, 3)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.



Κελλάπας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

