

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 98

A.2. α. Σωστό, β. Λάθος, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Σωστό.

B.1. 1 - ζ, 2 - γ, 3 - α, 4 - δ, 5 - β.

B.2. $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Θέμα 2^ο

α. Η f είναι συνεχής, άρα είναι και συνεχής στο $x_0 = 3$,
άρα $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \alpha x^2 = 9\alpha$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - e^{x-3}}{x-3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \underset{\text{L'Hospital}}{\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-e^{x-3}}{1}} = -1$$

$f(3) = 9\alpha$

Άρα $9\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{9}$.

β. $f(4) = \frac{1 - e^{4-3}}{4-3} = 1 - e$

$$\begin{aligned} \text{Για } x > 3 : f'(x) &= \left(\frac{1 - e^{x-3}}{x-3} \right)' = \frac{(1 - e^{x-3})' \cdot (x-3) - (1 - e^{x-3}) \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} \\ &= \frac{-e^{x-3} \cdot (x-3) - (1 - e^{x-3})}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

$$f'(4) = \frac{-e^{4-3} \cdot (4-3) - (1 - e^{4-3})}{(4-3)^2} = \frac{-e - (1 - e)}{1^2} = -1$$

(ε) : $y - f(4) = f'(4) \cdot (x - 4) \Leftrightarrow$

(ε) : $y - (1 - e) = -1 \cdot (x - 4) \Leftrightarrow$

(ε) : $y - 1 + e = -x + 4 \Leftrightarrow$

(ε) : $y = -x + 5 - e$.

γ. Για $x \in [1, 2]$ είναι $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 < 0$, άρα

$$E = - \int_1^2 f(x) dx = - \int_1^2 -\frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9} \cdot \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{9} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7}{27} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα 3^ο

α. 1^{ος} τρόπος

Έστω ότι η παραγωγίσιμη f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .

Από Θ. Fermat είναι $f'(x_0) = 0$.

$$[f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x)]' = (x^3 - 2x^2 + 6x - 1)' \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x) \cdot f'(x) + 2\beta f(x) \cdot f'(x) + \gamma \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6$$

και για $x = x_0$ είναι :

$$3f^2(x_0) \cdot f'(x_0) + 2\beta f(x_0) \cdot f'(x_0) + \gamma \cdot f'(x_0) = 3x_0^2 - 4x_0 + 6 \Leftrightarrow$$

$$0 = 3x_0^2 - 4x_0 + 6.$$

Άτοπο διότι το τριώνυμο $3x_0^2 - 4x_0 + 6$ έχει $\Delta = -56 < 0$.

Άρα η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β. Η λύση αυτή αποτελεί και 2^ο τρόπο για το α ερώτημα.

$$[f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x)]' = (x^3 - 2x^2 + 6x - 1)' \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x) \cdot f'(x) + 2\beta f(x) \cdot f'(x) + \gamma \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow$$

$$[3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma] \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6.$$

- Είναι $3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

διότι είναι τριώνυμο ως προς $f(x)$

με $\Delta = (2\beta)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \gamma = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$, αφού $\beta^2 < 3\gamma$.

- Είναι $3x^2 - 4x + 6 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

διότι είναι τριώνυμο ως προς x με $\Delta = -56 < 0$.

Άρα $f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 6}{3f^2(x) + 2\beta \cdot f(x) + \gamma} > 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα.

(άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα, για το α ερώτημα)

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$.

- η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ως πολυωνυμική.

- $g(0) = -1 < 0$ και $g(1) = 4 > 0$.

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$, ώστε $g(x_0) = 0$.

Είναι $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = g(x)$ και για $x = x_0$

$$f^3(x_0) + \beta f^2(x_0) + \gamma f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) \cdot [f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma] = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) = 0 \text{ ή } f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma = 0.$$

Το $f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma$ είναι τριώνυμο με $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$.

Άρα $f^2(x_0) + \beta f(x_0) + \gamma > 0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

Επομένως $f(x_0) = 0$

και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.

Άρα υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

Είναι $0 \leq \beta^2 < 3\gamma$,
 άρα $\gamma > 0$.
 Άρα $\beta^2 < 3\gamma < 4\gamma$
 $\Leftrightarrow \beta^2 < 4\gamma$
 $\Leftrightarrow \beta^2 - 4\gamma < 0$

Θέμα 4^ο

α. $f(x) = 1 - 2x^2 \cdot \int_0^1 t \cdot f^2(xt) dt$

$$= 1 - 2 \cdot \int_0^1 xt \cdot f^2(xt) \cdot x dt$$

$$= 1 - 2 \cdot \int_0^x u \cdot f^2(u) du$$

Θέτω $xt = u$
 $du = x dt$

- $t = 0 \rightarrow u = 0$.
- $t = 1 \rightarrow u = x$.

$$f'(x) = \left(1 - 2 \cdot \int_0^x u \cdot f^2(u) du \right)' = -2 \cdot \left(\int_0^x u \cdot f^2(u) du \right)' = -2 \cdot x \cdot f^2(x)$$

β. $g'(x) = \left[\frac{1}{f(x)} - x^2 \right]' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x \stackrel{(α)}{=} \frac{2x \cdot f^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 2x - 2x = 0$

άρα η g είναι σταθερή στο \mathbb{R} .

γ. $f(0) = 1 - 2 \cdot \int_0^0 u \cdot f^2(u) du = 1 - 2 \cdot 0 = 1$

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} - 0^2 = \frac{1}{1} - 0 = 1, \text{ και επειδή η } g \text{ είναι σταθερή}$$

είναι $g(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{f(x)} - x^2 = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

δ. Είναι $x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x = \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu 2x$

$$-1 \leq \eta\mu 2x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu 2x \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu 2x \right) = 0,$

άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x) = 0.$